



Simularea examenului de bacalaureat național 2017

Proba E. c) - 26.01.2017

M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE

Subiectul I

(30 puncte)

1.	$ z = \left \frac{2i}{3-4i} \right = \frac{ 2i }{ 3-4i } = \frac{\sqrt{0^2+2^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} =$	3p
	$= \frac{2}{5}.$	2p
2.	Trebuie ca ecuația $f(x) = 0$ să aibă două soluții reale distincte, deci $\Delta > 0$	1p
	Se calculează discriminantul $\Delta = (-2m)^2 - 4(m+2) = 4m^2 - 4m - 8$	2p
	Din $4(m^2 - m - 2) > 0$ se obține $m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty).$	2p
3.	Trebuie $x > 0.$	1p
	Se notează $\log_3 x = t$, de unde $t^2 - 2t - 3 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -1, t_2 = 3$	2p
	$t_1 = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1$, de unde $x = \frac{1}{3} > 0$	1p
	$t_2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3$, de unde $x = 27 > 0.$	1p
4.	Se pot forma $A_5^3 - A_4^2$ numere	3p
	Se calculează $A_5^3 - A_4^2 = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 48$ numere.	2p
5.	Din M, N, P mijloacele laturilor AB, BC , respectiv AC se obține $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ și respectiv $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$	3p
	Adunând cele trei relații rezultă $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}.$	2p
6.	Se calculează panta laturii $BC, m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = 2$	2p
	Din $m_{BC} \cdot m_h = -1$ se obține $m_h = -\frac{1}{2}.$	1p
	Ecuația dreptei cu panta m_h care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ este $y - y_0 = m_h(x - x_0).$ Prin înlocuire în aceasta se obține $y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0.$	2p



Subiectul II

(30 puncte)

1. a)	$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & m^2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$	2p
	$\det(A) = m^2 - 1.$	3p
b)	<p>Sistem compatibil nedeterminat dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) < 3$.</p> $\det(A) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m \in \{-1, 1\}.$	2p
	<p>Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ sistemul este compatibil determinat.</p> <p>Pentru $m = -1$ avem $\text{rang}(A) = 2$, un minor principal $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ și minor</p> $\text{caracteristic } d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ deci sistemul este incompatibil.}$ <p>Pentru $m = 1$ avem $\text{rang}(A) = 2$, un minor principal $d_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ și minorul</p> $\text{caracteristic } d_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ deci sistemul este compatibil nedeterminat.}$	3p
c)	<p>De la punctul anterior avem pentru $m = 1$ se obține că sistemul este compatibil nedeterminat. Se aleg x, y necunoscute principale și $z = \alpha \in \mathbb{R}$.</p> <p>Ecuatiile principale formează sistemul $\begin{cases} x + y = \alpha \\ 2x + y = \alpha \end{cases}$, de unde $x = 0, y = \alpha$.</p> <p>Soluțiile sistemului sunt de forma $(0, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$</p>	3p
	<p>Pentru orice soluție nebanală $(0, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$</p> $\text{se obține } E = \frac{0^2 + \alpha^2 + \alpha^2}{0^2 - 2\alpha^2 + 3\alpha^2} = 2 = \text{const.}$	2p
2. a)	$\forall A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) \in G$	2p
	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 - 2(ab + a + b) & ab + a + b \\ -6(ab + a + b) & 1 + 3(ab + a + b) \end{pmatrix} = A(ab + a + b) \in G.$	3p
b)	<p>Asociativitate: $\forall A(a), A(b), A(c) \in G \Rightarrow (A(a) \cdot A(b)) \cdot A(c) = A(a) \cdot (A(b) \cdot A(c))$</p> <p>Comutativitate: $\forall A(a), A(b) \in G \Rightarrow A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$</p> $A(a) \cdot A(b) = A(ab + a + b) = A(ba + b + a) = A(b) \cdot A(a).$	2p
	<p>Element neutru: $\exists E = A(e) \in G \text{ a.î. } A(a) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(a) = A(a), \forall A(a) \in G$.</p> $A(a) \cdot A(e) = A(ae + a + e). \text{ Din } A(ae + a + e) = A(a) \Rightarrow e = 0.$ <p>Se obține $A(e) = A(0) = I_2 \in G$.</p>	1p
	<p>Elemente simetrizabile: $\forall A(a) \in G, \exists A(a') \in G \text{ a.î. } A(a) \cdot A(a') = A(a') \cdot A(a) = A(0),$</p> $\text{Din } A(aa' + a + a') = A(0) \Rightarrow a' = \frac{-a}{a+1}, a > -1. \text{ Se obține } A(a') = A\left(\frac{-a}{a+1}\right) \in G.$	2p
c)	<p>Se scrie $A(a) \cdot A(b) = A(ab + a + b) = A((a+1)(b+1) - 1)$</p> <p>Atunci avem $A(a)^2 = A(a) \cdot A(a) = A((a+1)^2 - 1)$ și</p> $A(a)^3 = A(a)^2 \cdot A(a) = A((a+1)^3 - 1).$	2p



	Inducție matematică pentru $A(a)^n = A((a+1)^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.	2p
	Pentru $a = 1$ se obține $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}^{2017} = A(1)^{2017} = A(2^{2017} - 1)$.	1p

Subiectul III

(30 puncte)

1. a)	Inegalitatea devine $x - \ln(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, $\forall x \in (-1, \infty)$	1p
	$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, $x \in (-1, \infty)$	2p
	Din tabelul de variație al funcției rezultă că f este strict descrescătoare pentru $x \in (-1, 0]$ și strict crescătoare pentru $x \in [0, \infty)$, iar valoarea minimă a funcției este 0 pentru $x = 0$.	1p
	Se obține $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (-1, \infty)$.	1p
b)	Avem $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x - \ln(x+1)) = +\infty$, de unde $x = -1$ este asimptotă verticală la dreapta.	2p
	Din $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(x+1)] = +\infty$ rezultă că nu există asimptotă orizontală. Se caută asimptotă oblică $y = mx + n$.	3p
	$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x+1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x+1)) = -\infty.$ Nu există asimptotă oblică.	
c)	Mărginirea: Din punctul a) se obține $f(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Se arată prin inducție matematică $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.	2p
	Monotonia: $x_{n+1} - x_n = x_n - \ln(x_n + 1) - x_n = -\ln(x_n + 1) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă șir strict descrescător.	2p
	Șirul fiind mărginit inferior și descrescător este convergent. Dacă x este limita șirului, atunci trecând la limită în relația de recurență se obține $x = x - \ln(x+1)$ de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$.	1p
2. a)	$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 (x+1)^{-2} (x+1)' dx =$	3p
	$= -\frac{1}{x+1} \Big _0^1 = \frac{1}{2}.$	2p
b)	Avem $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n (x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} dx =$	3p
	$= \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	2p
c)	Din $\frac{x^n}{(x+1)^2} \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$, $n \geq 1$ rezultă că $I_n \geq 0$	2p
	Atunci $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.	3p